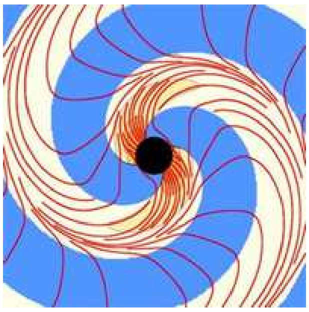
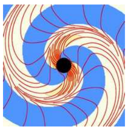
Cours

CHAPITRE 6

Mécanique des fluides





CHAPITRE 6

Mécanique des fluides

Introduction ____ 1

Notion de pression ____ 2

Statique des fluides ____ 3

Poussée d'Archimède ____ 4

Notion de débit ____ 5

Equation de continuité ____ 6

Dynamique des fluides ____ 7

Régimes d'écoulement – Nombre de Reynolds ____ 8

Frottement visqueux ____ 9

Cx en fonction de Re ____ 10

MECANIQUE DES FLUIDES

Introduction

1 – PREAMBULE

L'utilisation des fluides est très courante dans les systèmes techniques ; leur étude comportementale est donc essentielle.

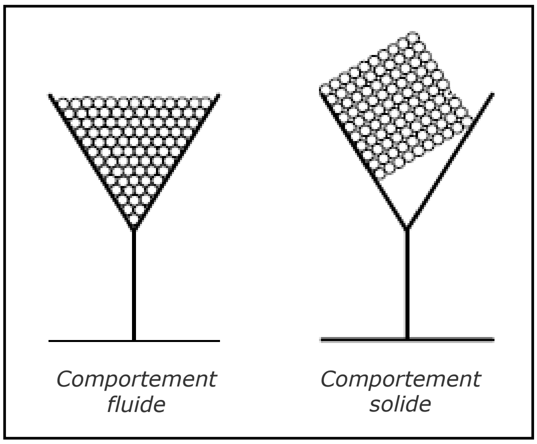
La mécanique des fluides propose un cadre théorique fondamental issu de la mécanique des milieux continus. L'aborder dans toute sa généralité est trop complexe à notre niveau mais certains cas particuliers sont accessibles (d'un point de vue mathématique) et permettent de traiter des problèmes (voir plus loin).

2 – NOTION DE FLUIDE

Un fluide est un corps sans forme propre : il prend la forme du récipient qui le contient.

On distingue :

- les **fluides compressibles**, appelés « gaz » ; ils occupent *tout l'espace* qui leur est offert et sont donc caractérisés par une masse volumique variable (selon le volume dont ils disposent)
- les **fluides incompressibles**, appelés « liquides » ; ils sont caractérisés par une masse volumique constante.



Exemple de masses volumiques à la température de $20\,°C$, sous la pression atmosphérique normale ($1\,bar$).

- Liquides (très peu sensible à la température et à la pression) : $\rho_{eau} = 1000\ kg \cdot m^{-3}$, $\rho_{huile} = 920\ kg \cdot m^{-3}$
- Gaz : $\rho_{air} = 1{,}293\ kg \cdot m^{-3}$, $\rho_{hélium} = 0{,}1785\ kg \cdot m^{-3}$

3 – PRINCIPALES GRANDEURS PHYSIQUES UTILISEES

La mécanique des fluides met en relation de nombreuses grandeurs caractéristiques du milieu comme sa **pression** en un point donné, sa **viscosité** (cinématique ou dynamique), sa **masse volumique**, la **vitesse** de l'écoulement, sa **dénivelée** (hauteur de chute).

La circulation d'un fluide, que ce soit dans une conduite en charge (tuyau sous pression) ou à ciel ouvert (canal) implique des **pertes d'énergie** à cause des frottements. On parle alors de **pertes de charge**. L'aspect énergétique est donc sous-jacent et la notion de **puissance** s'avère utile pour résoudre certains problèmes, notamment en hydraulique.

4 – CAS PARTICULIERS

Statique des fluides

Il s'agit d'étudier un fluide au repos. Comme il n'y a pas de mouvement, les pertes de charges sont nulles et le fluide peut être considéré comme parfait sans avoir à faire d'approximation.

*La statique des fluides, appelée aussi « hydrostatique », est régie par la loi de l'hydrostatique (et du **théorème de Pascal**) qui est finalement un cas particulier du théorème de Bernoulli.*

Dynamique des fluides

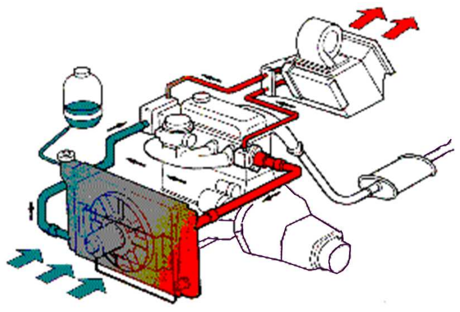
Il s'agit d'étudier un fluide en mouvement. Sauf à considérer le fluide comme parfait, les pertes de charges sont non nulles et elles doivent donc être prises en compte.

*La dynamique des fluides, appelée aussi « hydrodynamique » ou « aérodynamique » si le fluide est un gaz, est régie par le **théorème de Bernoulli**.*

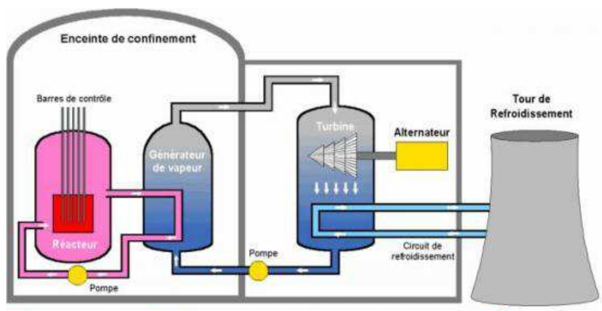
Hydraulique

L'hydraulique est de la mécanique (des fluides) appliquée. Elle s'appuie donc sur une base théorique importante mais de nombreuses notions empiriques sont utilisées. On peut la segmenter en deux parties :

⇒ L'hydraulique industrielle qui vise à dimensionner des circuits hydrauliques dans les machines (circuit de refroidissement d'un moteur thermique ou d'une centrale nucléaire par exemple).

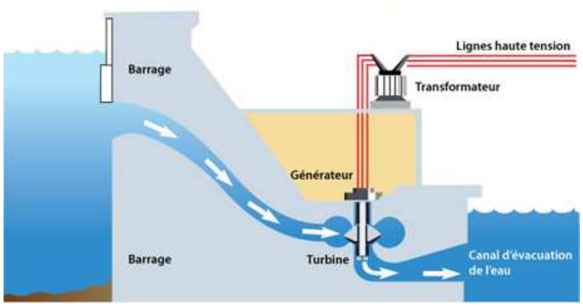


Circuit de refroidissement d'un moteur thermique

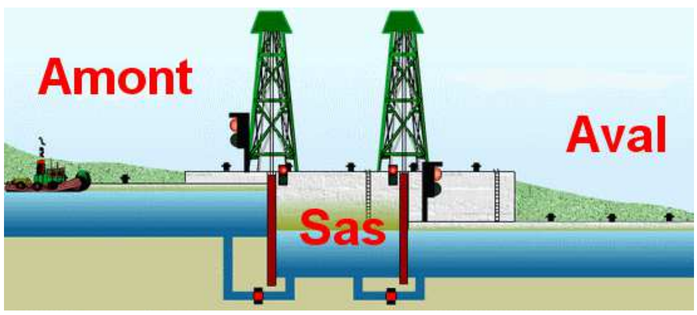


Circuit de refroidissement d'une centrale nucléaire

⇒ L'hydraulique urbaine qui vise à dimensionner par exemple des réseaux d'adduction d'eau potable, des barrages, déversoirs, vannes, écluses, etc.



Barrage hydraulique (centrale hydroélectrique)



Ecluse (passage des bateaux de l'amont à l'aval ou l'inverse)

MECANIQUE DES FLUIDES

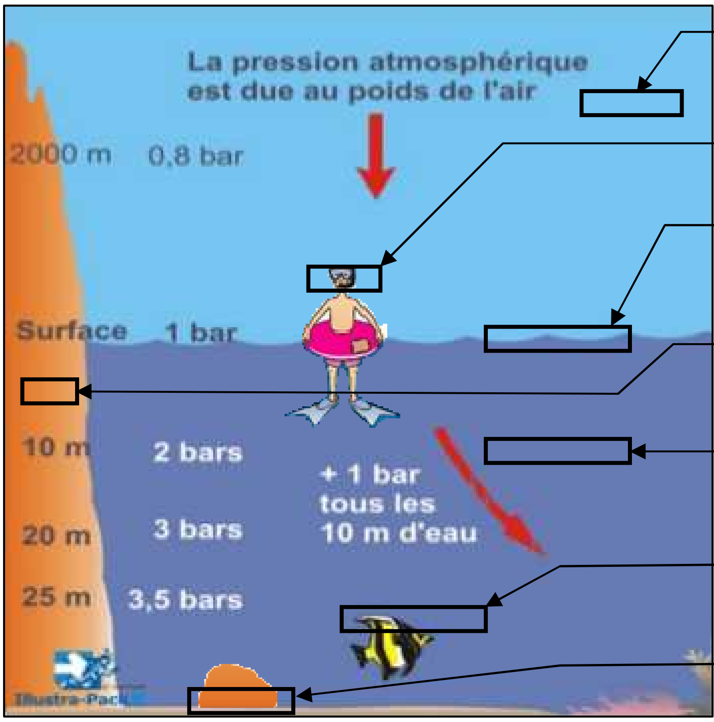
Notion de pression

Chapitre 6

2

1 – PREAMBULE

La **pression** est une grandeur physique qui reflète la **force** exercée par un milieu sur un autre sur une **surface** donnée. Par « milieu » on entend un **milieu fluide** (liquide ou gaz) ou un **milieu solide** :



Pression **dans un gaz.**
- On dira ici pression de l'air à une altitude donnée.

Pression d'un **gaz sur un solide**.

Pression d'un **gaz sur un liquide**.

Pression **dans un solide**. (Contrainte)
- Voir cours Chapitre 8, fiche 3 (Notion de contrainte)

Pression **dans un liquide.**
- On dira ici pression de l'eau à une profondeur donnée.

Pression d'un **liquide sur un solide**.

Pression d'un **solide sur un solide**. (Pression de contact)
- Voir cours Chapitre 3, fiche 6 (Action de contact - Charge surfacique)

Selon le contexte, la notion de pression « change de nom » :

On parlera de pression de contact (ou charge surfacique) entre deux solides (voir cours chapitre 3, Modélisation des efforts).

On parlera de « contrainte » pour évoquer la pression à l'intérieur d'un solide (voir cours chapitre 8, RDM).

En mécanique des fluides, on parle de pression, tout simplement.

2 – DEFINITION (MACROSCOPIQUE) - UNITES

La pression est le rapport d'une force par une surface :

Unité légale : le Pa avec $1\ Pa \Leftrightarrow 1\ N \cdot m^{-2}$

Unité pratique : le bar avec $1\ bar \Leftrightarrow 10^5\ Pa$

$$\boxed{P = \frac{F}{S}}$$

Force (N)

Surface (m²)

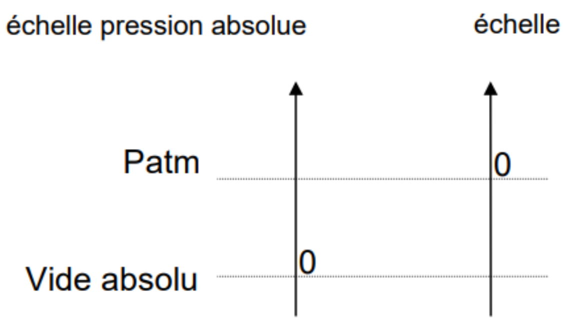
Pression (Pa)

Pour les fluides (liquides et gaz), la valeur de la pression p dépend de l'altitude (ou profondeur) z à laquelle on se trouve, l'expression $p(z)$ dépend de la nature compressible ou incompressible du milieu → voir fiche n°3.

3 – PRESSION ABSOLUE – PRESSION RELATIVE

La pression absolue est la pression mesurée par rapport au vide absolu (c'est-à-dire l'absence totale de matière). Elle est toujours positive.

La pression relative se définit par rapport à la pression atmosphérique existant au moment de la mesure: cette pression peut donc prendre une valeur positive si la pression est supérieure à la pression atmosphérique ou une valeur négative si la pression est inférieure à la pression atmosphérique.



Les deux types de pressions correspondent physiquement à la même pression, elles sont simplement exprimées sur des échelles ayant des « zéros » différents.

La relation suivante permet de passer de l'une à l'autre:

$$\boxed{P_{absolue} = P_{relative} + P_{atmosphérique}}$$

Les notions de pression absolue et relative sont purement pratiques. En effet, dans nombre de problèmes, on est amené à travailler avec des différences de pression. Aussi, plus tôt que de travailler avec des pressions absolue et d'avoir systématiquement à soustraire les pressions atmosphériques, on préfère travailler en pressions relatives.

MECANIQUE DES FLUIDES

Statique des fluides (hydrostatique)

1 – PREAMBULE

La statique des fluides a pour but l'étude des fluides au repos. Il s'agit donc d'un cas particulier de la mécanique des fluides.

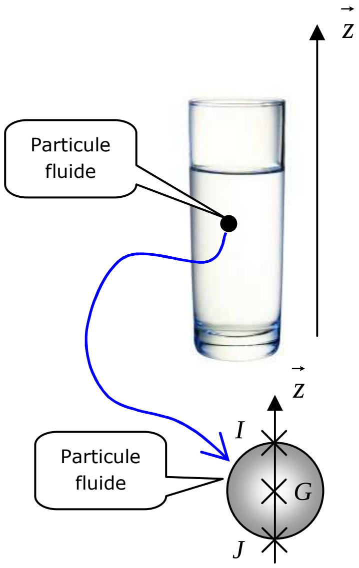
Démarche pour étudier un fluide au repos : un fluide étant une quantité de matière, on peut lui appliquer le PFS. Ceci donne **l'équation fondamentale de la statique des fluides**. Partant de cette équation fondamentale, on lui adjoint une « loi d'évolution » du fluide mis en jeu ; on peut par exemple considérer un fluide :

- $\Rightarrow$ Incompressible et homogène → cas des liquides (comme l'eau)
- $\Rightarrow$ Compressible et isotherme → modèle possible pour les gaz (il en existe d'autres…)

Ces deux cas particuliers sont traités plus loin.

2 – EQUATION FONDAMENTALE DE LA STATIQUE DES FLUIDES

L'entité élémentaire dans l'étude des fluides est ce qu'on nomme une **particule fluide**. Il s'agit de l'analogue du point matériel en mécanique du solide si ce n'est qu'elle dispose d'un volume mais tout petit d'un point de vue macroscopique. La réalisation du BAME et l'application du PFS à la particule fluide donne la loi de la statique des fluides :



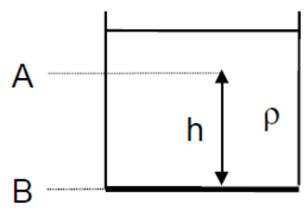
$$\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g \quad \text{avec} \quad \begin{cases} dP = P_I - P_J & \text{Différence de pression entre les points } I \text{ et } J \text{ (Pa)} \\ dz = z_I - z_J & \text{Différence d'altitude entre les points } I \text{ et } J \text{ (m)} \\ \rho & \text{Masse volumique du milieu fluide (kg.m}^{-3}\text{)} \\ g & \text{Intensité du champ de pesanteur (m.s}^{-2}\text{)} \end{cases}$$

3 – FLUIDE INCOMPRESSIBLE ET HOMOGENE – LOI DE L'HYDROSTATIQUE

Dans le cas général, la masse volumique dépend de la pression et de la température mais l'expérience montre que c'est sensiblement le cas pour les gaz mais très peu pour les liquides.

→ Si la masse volumique ne dépend pas de la pression, le fluide est dit « **incompressible** ».

→ Si la température est la même en tout point ($T_A = T_B$), alors la masse volumique n'en dépend pas et le fluide est dit « **homogène** ».



Le long de la ligne de courant AB, cela donne :

Admettons enfin que le champ de pesanteur g soit constant (ce qui est globalement vrai si la dénivelée $\Delta z = z_A - z_B$ n'est pas excessive). Dans ce cas, l'intégration de l'équation fondamentale de la statique donne : $\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g$

$$\Leftrightarrow \quad dP = -\rho \cdot g \cdot dz \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{P + \rho \cdot g \cdot z = C^{ste}}$$

Pression (Pa)
Masse volumique (kg.m^{-3})
Hauteur (m)
Champ de pesanteur (m.s^{-2})

$$\boxed{P_A + \rho \cdot g \cdot z_A = P_B + \rho \cdot g \cdot z_B}$$

C'est comme ceci qu'il faut l'écrire dans les exercices.

4 – FLUIDE COMPRESSIBLE ET ISOTHERME

On se propose ici de déterminer l'évolution de la pression P en fonction de l'altitude z pour un modèle simple d'atmosphère en utilisant le principe fondamental de la statique des fluides. Soit $P(z)$ cette fonction.

☞ *On gardera à l'esprit que ce modèle est un parmi de nombreux autres, plus ou moins complexes.*

Hypothèses sur l'atmosphère :

- Assimilée à un gaz parfait (la loi de Mariotte s'applique),
- Soumise uniquement au champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ (indépendant de l'altitude),
- Isotherme (pas de variation de température),
- Au repos dans un référentiel galiléen.

L'application de loi de l'hydrostatique avec la prise en compte des hypothèses précitées donne :

$$\boxed{P(z) = P_0 \cdot e^{-\frac{Mg}{RT}(z-z_0)}}$$

avec

- $P(z)$ Pression à l'altitude z (Pa)
- P_0 Pression à l'altitude de référence (Pa)
- M Masse molaire de l'atmosphère (kg.mol^{-2})
- g Intensité du champ de pesanteur (m.s^{-2})
- R Constante des gaz parfaits (J.kg^{-1}.K^{-1})
- T Température thermodynamique de l'atmosphère (K)
- z Altitude d'un point de l'atmosphère (m)
- z_0 Altitude de référence (m)

5 – THEOREME DE PASCAL

Soit un fluide incompressible en équilibre (au repos). Soient deux points A et B dans ce fluide. Leur pression initiale est $P_i(A)$ et $P_i(B)$.

A l'aide d'un dispositif quelconque, on applique une force ce qui a pour effet d'augmenter la pression au point A. Soit $P_f(A)$ la pression finale au point A.

On a donc, au point A, engendré une variation de pression $\Delta P_A = P_f(A) - P_i(A)$.

Blaise Pascal
(1623 – 1662)

Question : Quelle est la variation de pression induite au point B ?

Réponse :

Loi de l'hydrostatique entre A et B à l'état initial : $P_i(B) + \rho \cdot g \cdot z_B = P_i(A) + \rho \cdot g \cdot z_A$

Loi de l'hydrostatique entre A et B à l'état final : $P_f(B) + \rho \cdot g \cdot z_B = P_f(A) + \rho \cdot g \cdot z_A$

Par soustraction, on obtient : $P_f(B) - P_i(B) = P_f(A) - P_i(A) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta P_B = \Delta P_A}$

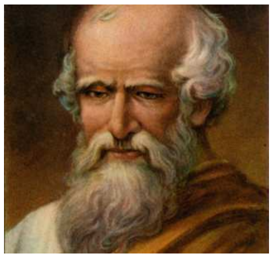
Ce résultat constitue le théorème de Pascal dont voici l'énoncé :

« Toute variation de pression en un point d'un fluide incompressible en équilibre est intégralement transmise en tout point du fluide ».

MECANIQUE DES FLUIDES

La poussée d'Archimède

1 – APPROCHE HISTORIQUE



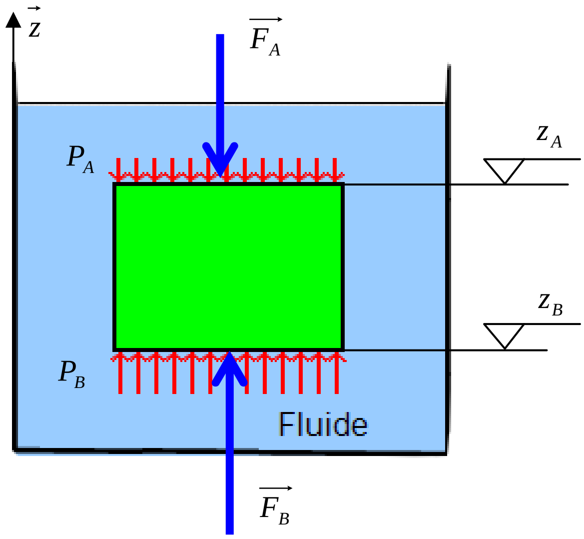
Archimède
(287 – 212 Av. J-C)

Archimède énonça le principe suivant : *« Tout corps plongé dans un liquide subit une poussée verticale, vert le haut, dont l'intensité est égale au poids d'eau déplacé ».*

Ce principe s'explique aujourd'hui à l'aide de l'hydrostatique. De plus, à l'aide du PFD (seconde loi de Newton), on peut mettre en place la notion de **flottabilité**.

2 – EXPRESSION DE LA POUSSEE D'ARCHIMEDE

Intensité : Prenons un cube de masse $m \neq 0$. La face située à l'altitude z_A est soumise à la pression P_A et il en résulte une force vers le bas, $\overrightarrow{F_A}$. La face située à l'altitude z_B est soumise à la pression P_B et il en résulte une force vers le haut $\overrightarrow{F_B}$. La poussée d'Archimède est la résultante de ces forces de pression : $\vec{F} = \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B}$ et on montre (via l'hydrostatique) que son intensité vaut :



Poussée (N) — Volume immergé (m^3)

$$\boxed{F = \rho \cdot g \cdot V}$$

Champ de pesanteur ($m \cdot s^{-2}$)
Masse volumique du milieu fluide ($kg \cdot m^{-3}$)

Direction et sens : les faces supérieure et inférieure étant **horizontale**, les poussées $\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$ sont verticales et donc la résultante $\vec{F}$ aussi. De plus, $P_B > P_A \Rightarrow F_B > F_A$ donc la poussée est **vers le haut**.

Point d'application : c'est le centre de poussée. Dans des cas comme celui du cube, il est confondu avec le centre de gravité.

<u>Représentation torsorielle</u> : *la poussée d'Archimède est une force à laquelle aucun couple pur n'est associé. Ce faisant, elle se représente à l'aide d'un **torseur glisseur** lorsqu'elle est écrite là où elle est appliquée (au centre de poussée).*

3 – FLOTTABILITE DES CORPS SOLIDES DANS UN MILIEU FLUIDE

C'est un pur problème de dynamique qui, une fois posé, amène à comparer la densité du solide d_s avec celle du milieu fluide d_f.

$d_f > d_s$ ⇨ Le solide monte (il tend à accélérer jusqu'à trouver l'équilibre)
$d_f < d_s$ ⇨ Le solide descend (il tend à accélérer jusqu'à toucher le fond et s'immobiliser)
$d_f = d_s$ ⇨ Le solide ne bouge pas (il flotte « entre deux eaux », là où il a été abandonné à lui-même)

MECANIQUE DES FLUIDES

Notion de débit

1 – PREAMBULE

L'écoulement d'un fluide se manifeste par son **déplacement**. Il peut avoir lieu dans une conduite en charge (c'est-à-dire sous pression) ou bien à surface libre mais que pour les liquides, pas pour les gaz.

Ecoulement en charge

Ecoulement à surface libre

2 – DEFINITION

Le débit est la **quantité de fluide qui s'écoule par unité de temps** ; on distingue toutefois le cas ou la quantité de fluide est exprimée en unité de **volume** (m^3) ou en unité de **masse** (kg) :

Débit volumique ($m^3.s^{-1}$)

$$\boxed{Q_v = \frac{V}{t}}$$

Volume (m^3)

Temps (s)

Débit massique ($kg.s^{-1}$)

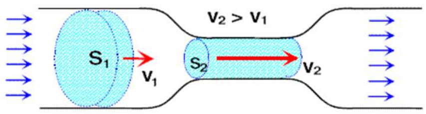
$$\boxed{Q_m = \frac{M}{t}}$$

Masse (kg)

Temps (s)

On rappelle que la masse et le volume sont relié par la masse volumique : $\rho = M/V$. Cette formule permet de passer du débit volumique au débit massique et inversement.

Très pratique : on montre (facilement) que le débit volumique est donné par la formule ci-contre :



$Q_{v1} = S_1 \cdot V_1$

Débit dans la section S_1

$Q_{v2} = S_2 \cdot V_2$

Débit dans la section S_2

Débit volumique ($m^3.s^{-1}$)

$$\boxed{Q_v = S \cdot V}$$

Vitesse moyenne ($m.s^{-1}$)

Section (m^2)

3 – DEBIT CONSTANT – DEBIT VARIABLE

Prenons un robinet par lequel de l'eau peut couler. On comprend bien que plus le robinet est ouvert, plus le débit sera important (car la quantité d'eau délivrée par unité de temps dépend de l'ouverture du robinet).

Dans la suite, on raisonne en débit volumique.

Débit constant :

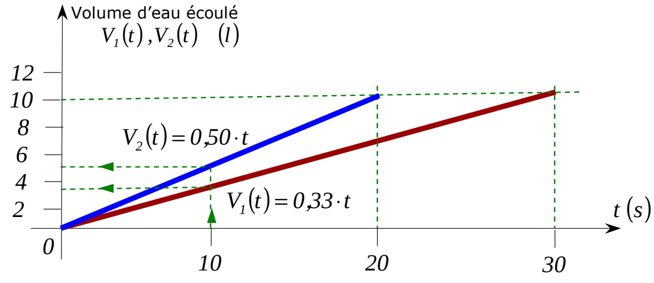
Avec une ouverture de robinet donnée, on constate qu'il faut $30\,s$ pour remplir un sceau de $10\,l$; on a donc un débit $Q_1 = V/t = 10/30 = 0{,}33\,l \cdot s^{-1}$.

⇒ Pendant l'écoulement, le réglage du robinet n'a pas été modifié : **le débit a été constant**.

⇒ On peut connaître à chaque instant le volume écoulé avec $V_1 = Q_1 \times t = 0{,}33 \cdot t$ (équation de droite).

On ouvre un peu plus le robinet et on constate cette fois-ci qu'il faut $20\ s$ pour remplir le sceau de $10\ l$; le débit Q_2 vaut donc $Q_2 = V / t = 10 / 20 = 0{,}50\ l \cdot s^{-1}$.

⇒ Là aussi, pendant l'écoulement, le réglage du robinet n'a pas été modifié : **le débit a été constant**.
⇒ On peut connaître à chaque instant le volume écoulé avec $V_2 = Q_2 \times t = 0{,}50 \cdot t$ (équation de droite).



Evolution du remplissage du sceau avec des débits constants.

Le débit correspond au coefficient directeur de la droite $V(t)$.

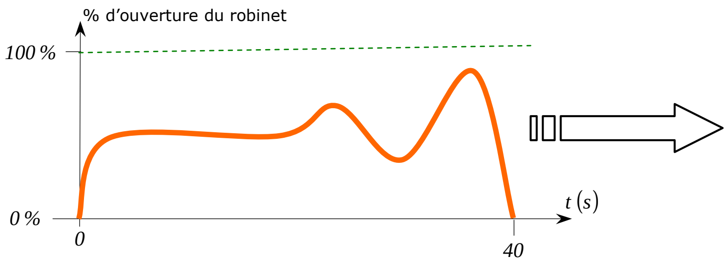
Q_2 est plus grand que le débit Q_1 parce que le robinet est plus ouvert. Il aura fallut moins de temps pour remplir le sceau de $10\ l$ (20 s contre 30 s).

Les équations de droite données dans les exemples permettent de calculer un volume écoulé pendant un temps donné (et avec un débit donné). Par exemple, au bout de $t = 10\ s$, on a :

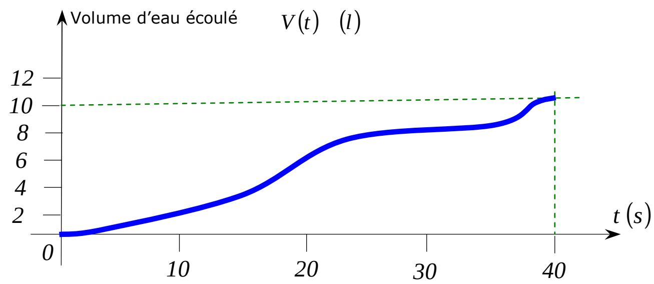
$V = Q_1 \times t = 0{,}33 \times 10 = 3{,}3\ l$ et $V = Q_2 \times t = 0{,}50 \times 10 = 5\ l$

Débit variable :

Supposons maintenant que, pour remplir les $10\ l$ d'eau, on « s'amuse » à faire varier l'ouverture du robinet :



On fait varier l'ouverture du robinet
⇨ *0% = robinet complètement fermé*
⇨ *100% = robinet complètement ouvert*



Evolution du remplissage du sceau avec un débit variable.
Le volume ne fait que croitre (la fonction $V(t)$ est croissante)

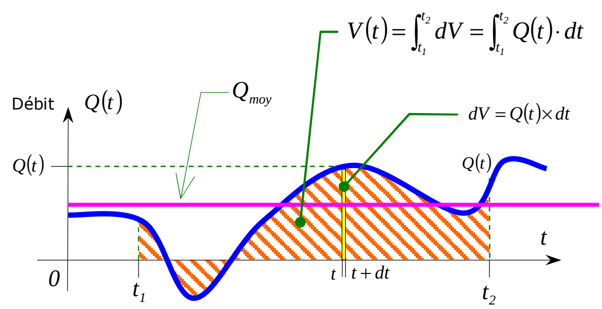
Ici, le débit Q ne cesse de varier au cours du temps et l'équation $V = Q \times t$ n'est plus celle d'une droite.

4 – DEBIT INSTANTANE – DEBIT MOYEN

Le constat fait avec la notion de débit variable amène à quitter le cas particulier de l'équation de droite pour généraliser le calcul du volume écoulé en toutes circonstances.

Débit instantané : *le calcul intégral permet de généraliser…*

$$dV(t) = Q(t) \times dt \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{Q(t) = \frac{dV(t)}{dt}}$$



Débit moyen :

$$\boxed{Q_{moy} = \frac{V}{\Delta t}}$$

Dans le cas où le système absorbe (ou cède) un volume V connu en une durée Δt connue, le calcul ci contre donne la **débit moyen** Q_{moy} (il ne préjuge pas *des variations* du débit sur la durée Δt).

Si le débit est connu à l'aide d'une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, le **débit moyen** Q_{moy} peut être calculé comme ceci :

$$\boxed{Q_{moy} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} Q(t) \cdot dt}$$

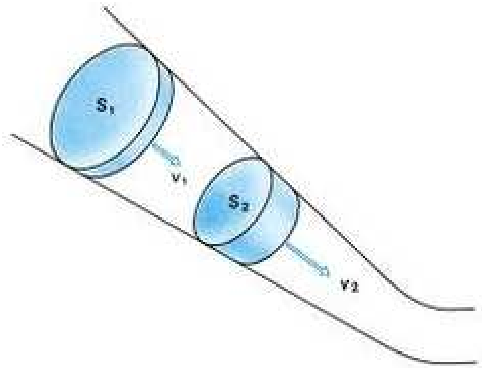
Chapitre 6

MECANIQUE DES FLUIDES

Equation de continuité

6

1 – PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA MASSE



Un milieu est dit « continu » s'il n'y a pas de « trou » dedans (il y a de la matière partout).

Pour un milieu continu fluide, la logique impose que toute la masse m_1 qui passe par la section S_1 en $1\ s$ par exemple doit être égale à toute la masse m_2 qui passe par la section S_2, également en $1\ s$.

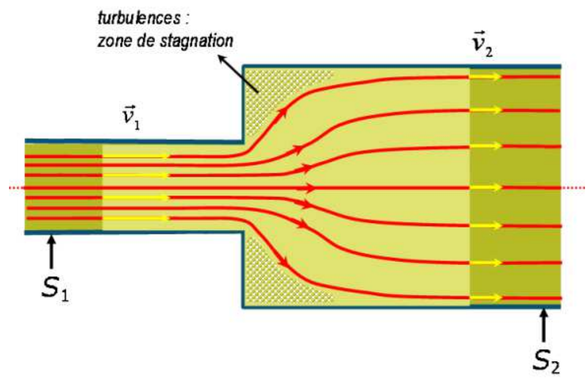
Par principe, il y a conservation de la matière et donc de la masse :

$$m_1 = m_2$$

2 – EQUATION DE CONTINUITE

Les débits massiques sont :

$$Q_{m1} = \frac{m_1}{t} \text{ pour } S_1 \qquad Q_{m2} = \frac{m_2}{t} \text{ pour } S_2.$$



L'égalité $m_1 = m_2$ impose l'égalité des débits : $Q_{m1} = Q_{m2}$

Soit v_1 la vitesse du fluide dans la section S_1. On montre facilement que $Q_{m1} = \rho \cdot S_1 \cdot v_1$, ρ étant la masse volumique du fluide. Par analogie, on a immédiatement $Q_{m2} = \rho \cdot S_2 \cdot v_2$.

L'égalité $Q_{m1} = Q_{m2}$ donne alors :

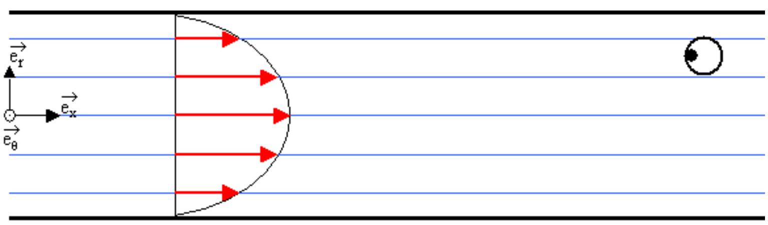
Très utile

$$\boxed{S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2}$$

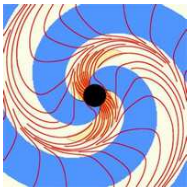
Equation de continuité pour un fluide incompressible et homogène

3 – VITESSE MOYENNE D'ECOULEMENT

On a considérer ci-dessus que la vitesse du fluide est partout la même dans une section donnée (S_1 par exemple) ; en fait, ceci est faux ; en effet, le fluide dispose d'une certaine viscosité qui génère des frottements sur les couches fluides et le contact avec l'intérieur de la conduite (qui est rugueuse) génère aussi des frottements.
Du coup, **le champ des vitesses n'est pas uniforme** dans une section ; on montre qu'il suit une distribution parabolique, comme le montre la figure ci-dessous.



Cela dit, à notre niveau, nous négligerons systématiquement cet aspect et nous considérerons que la vitesse est uniforme dans la section (partout la même), ce qui revient à considérer une **vitesse moyenne d'écoulement**.



MECANIQUE DES FLUIDES

Dynamique des fluides (hydrodynamique)

1 – PREAMBULE

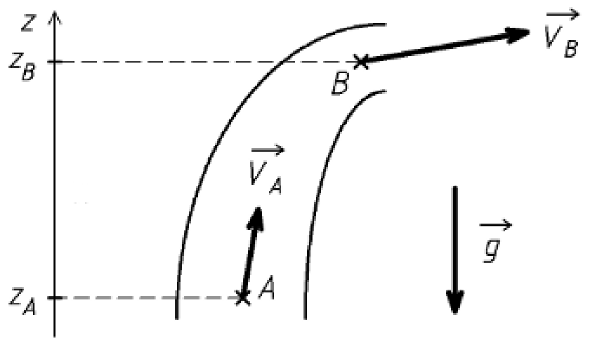
La dynamique des fluides a pour but l'étude des écoulements fluides.

Démarche pour étudier un écoulement fluide : l'écoulement fluide étant supposé continu (il n'y a pas de « trou » dans la matière), on peu lui appliquer le principe de conservation de la masse. Par ailleurs, pour un volume de fluide donné, on peut lui appliquer le principe de conservation de l'énergie. Ceci donne **l'équation fondamentale de la dynamique des fluides**, appelée théorème de Bernoulli.

⇒ *Dans la suite, on s'intéresse au fluide **incompressible** et **homogène** (cas des liquides).*

⇒ *Les gaz seront considérés comme **incompressible** et **homogène** à condition que le gradient de pression entre l'entrée et la sortie n'excède pas $3000\ Pa$.*

2 – THEOREME DE BERNOULLI



Considérons un écoulement fluide placé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ et observons la déplacement d'une masse fluide allant de A vers B en suivant la *ligne de courant* AB.

Pour simplifier les calculs à venir, on raisonne sur une masse unitaire : $m = 1\ kg$.

Daniel Bernoulli
(1700 – 1782)

Ajoutons que l'équation de continuité implique que $m_A = m_B = m = 1\ kg$.

Ecoulement sans échange de travail avec l'extérieur

Bilans énergétiques : (rappel : $m_A = m_B = m = 1\ kg$)

Energie	en A	en B
potentielle de hauteur	$E_{A\,1} = g \cdot z_A$	$E_{B\,1} = g \cdot z_B$
de pression	$E_{A\,2} = \frac{1}{\rho} \cdot P_A$	$E_{B\,2} = \frac{1}{\rho} \cdot P_B$
cinétique	$E_{A\,3} = \frac{1}{2} \cdot v_A^2$	$E_{B\,3} = \frac{1}{2} \cdot v_B^2$
thermique	$E_{A\,4} = c \cdot T_A$	$E_{B\,4} = c \cdot T_B$
Totale	$E_{Totale\ A} = \sum E_{A\,i}$	$E_{Totale\ B} = \sum E_{B\,i}$

L'énergie totale en A vaut : $E_{TA} = E_{A1} + E_{A2} + E_{A3} + E_{A4} = g \cdot z_A + \dfrac{1}{\rho} \cdot P_A + \dfrac{1}{2} \cdot V_A^2 + c \cdot T_A$

L'énergie totale en B vaut : $E_{Totale\ B} = E_{B1} + E_{B2} + E_{B3} + E_{B4} = g \cdot z_B + \dfrac{1}{\rho} \cdot P_B + \dfrac{1}{2} \cdot V_B^2 + c \cdot T_B$

Le principe de conservation de l'énergie donne : $E_{Totale\ A} = E_{Totale\ B}$ et, dans le cas particulier d'une **circulation isotherme**, on a $T_A = T_B \quad \Rightarrow \quad E_{A4} = E_{B4}$ soit : $\dfrac{1}{2} v_A^2 + \dfrac{1}{\rho} P_A + g \cdot z_A = \dfrac{1}{2} v_B^2 + \dfrac{1}{\rho} P_B + g \cdot z_B$

Qu'on préfère écrire comme ceci : $$\boxed{\frac{1}{2} \cdot \left(v_A^2 - v_B^2\right) + \frac{1}{\rho} \cdot \left(P_A - P_B\right) + g \cdot \left(z_A - z_B\right) = 0}$$

Théorème de Bernoulli

Si le fluide est au repos, alors $v_A = v_B = 0 \quad \Rightarrow \quad P_A + \rho \cdot g \cdot z_A = P_B + \rho \cdot g \cdot z \quad \Rightarrow \quad \Delta P = -\rho \cdot g \cdot \Delta z$

On retombe donc sur la loi de l'hydrostatique pour un fluide incompressible et homogène.

Ecoulement avec échange de travail avec l'extérieur

Si le fluide traverse une machine hydraulique, alors il échange de l'énergie E avec cette machine :

- $\Rightarrow$ $E > 0$ si la machine fournit de l'énergie au fluide (cas d'une pompe).
- $\Rightarrow$ $E < 0$ si le fluide cède de l'énergie à la machine (cas d'une turbine).

De plus, le fluide circule dans une conduite (ou un canal) dont les surfaces présentent une certaine **rugosité** qui est le siège de frottement. Ceci génère des **pertes de charge régulières** $E_{reg\,(AB)}$.

Enfin, la conduite peut présenter des **accidents** (coudes, rétrécissements de section, etc.) qui occasionnent des **pertes de charge singulières** $E_{sin\,g\,(AB)}$.

Le théorème de Bernoulli se généralise alors come ceci :

Théorème de Bernoulli généralisé

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot \left(v_A^2 - v_B^2\right) + \frac{1}{\rho} \cdot \left(P_A - P_B\right) + g \cdot \left(z_A - z_B\right) = E - E_{reg\,(AB)} - E_{sin\,g\,(AB)}}$$

En multipliant tout par ρ :

*Termes homogènes à **une énergie***

$$\boxed{\frac{\rho}{2} \cdot \left(v_A^2 - v_B^2\right) + \left(P_A - P_B\right) + \rho \cdot g \cdot \left(z_A - z_B\right) = E - E_{reg\,(AB)} - E_{sin\,g\,(AB)}}$$

En divisant tout par $\rho \cdot g$:

*Termes homogènes à **une pression***

$$\boxed{\frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left(v_A^2 - v_B^2\right) + \frac{1}{\rho \cdot g}\left(P_A - P_B\right) + \left(z_A - z_B\right) = E - E_{reg\,(AB)} - E_{sin\,g\,(AB)}}$$

*Termes homogènes à **une hauteur***

C'est essentiellement sous cette forme qu'on utilise le théorème de Bernoulli pour résoudre les problèmes.

MECANIQUE DES FLUIDES

Nombre de Reynolds – Régimes d'écoulement

1 – PREAMBULE

Osborne Reynolds
(1842 – 1912)

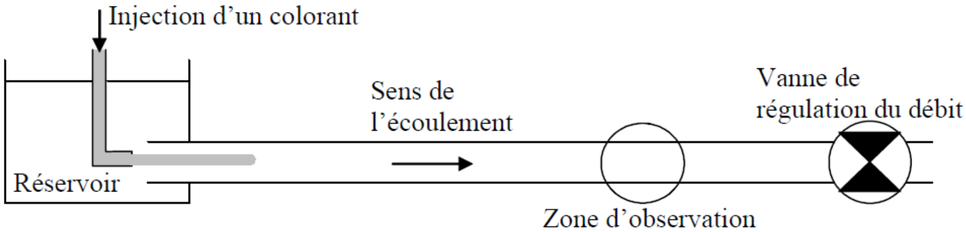
Reynolds réalisa des expériences fondamentales relatives à l'étude des écoulements des fluides visqueux. De ses travaux, il en sort un nombre sans dimension, appelé nombre de Reynolds, noté R_e et qui permet de classer les écoulements selon leur nature qui peut être **laminaire**, **transitoire** ou **turbulent**.

Pratiquement, le nombre de Reynolds permet de définir le cadre théorique à utiliser quand on cherche à évaluer :

- ⇒ Les forces de frottement subit par un corps dans un fluide en mouvement,
- ⇒ Les pertes de charges singulières et régulières,
- ⇒ L'épaisseur de la couche limite (non abordé)

2 – EXPERIENCE DE REYNOLDS – REGIMES D'ECOULEMENT

Présentation du dispositif expérimental



Un premier réservoir d'eau de niveau constant est vidangé par un conduit. Une vanne placée à l'extrémité du conduit permet de faire varier le débit. Un tuyau placé à l'intérieur du réservoir permet d'injecter un mince filet fluide coloré au centre du conduit.

Résultats

Quand la vitesse est faible, le filet coloré reste bien défini, rectiligne et parallèle à l'axe du tuyau.

⇒ Le régime est dit **laminaire**.

Régime laminaire

Si on augmente un peu la vitesse, le filet coloré ne reste plus bien rectiligne et parallèle à l'axe du tuyau. Des petites ondulations variables apparaissent.

⇒ Le régime est dit **transitoire**.

Régime transitoire

Quand la vitesse est plus élevée, le filet devient ondulé et très instable. Il se mélange rapidement au fluide ambiant. Des tourbillons de différentes tailles apparaissent.

Régime turbulent

⇒ Le régime est dit **turbulent**.

3 – NOMBRE DE REYNOLDS

Les expériences menées par Reynolds montrent que la **vitesse de l'écoulement** est un paramètre essentiel pour déterminer si on est en régime laminaire ou turbulent, mais ce n'est pas le seul. La **viscosité du fluide** a une incidence, ainsi qu'une **distance caractéristique** (le diamètre du conduit dans l'expérience). De ses travaux, Reynolds en sort son nombre qui exprime le rapport entre les forces de frottement dues à la viscosité et celles dues à la vitesse (forces inertielles) :

$$\boxed{R_e = \frac{V \cdot L}{\nu}}$$

avec

- R_e : nombre de Reynolds (sans dimension)
- V : vitesse de l'écoulement ($m \cdot s^{-1}$)
- L : longueur caractéristique (m)
- ν : viscosité cinématique ($m^2 \cdot s^{-1}$)

La longueur caractéristique peut être :

⇒ Ecoulement en conduit cylindrique : L = diamètre de la conduite

⇒ Ecoulement entre deux plaques parallèles : L = distance entre les deux plaques

⇒ Ecoulement autour d'une sphère : L = diamètre de la sphère

⇒ Ecoulement autour d'une aile d'avion : L = corde (distance entre les bords d'attaque et de fuite)

4 – REGIMES D'ECOULEMENT EN FONCTION DU NOMBRE DE REYNOLDS

Régime de stokes : $R_e < 1$

L'écoulement est gouverné par les forces de viscosité (il est dit « rampant »). On parle parfois d'écoulements microfluidiques (petit volume de fluide s'écoulant très lentement dans des petits canaux) ; ils ont une dimension applicative dans les domaines de la chromatographie, l'électrophorèse, le séquençage du génome humain, etc.

Régime laminaire : $R_e < 2500$

L'écoulement est gouverné par les forces de viscosité ; en hydraulique, on cherche autant que faire se peut de se placer dans ce régime car les pertes d'énergie sont moindres.

Régime de transition (ou critique) : $2500 < R_e < 4000$

Très complexe à décrire sur le plan théorique. D'un point de vue calculatoire, il est assimilé au régime turbulent.

Régime turbulent : $R_e > 4000$

L'écoulement est gouverné par les forces d'inertie (liées à la vitesse du fluide) ; en hydraulique, on cherche autant que faire se peut à l'éviter car les pertes d'énergie sont proportionnelles au carré de la vitesse et donc grandissent très vite.

MECANIQUE DES FLUIDES

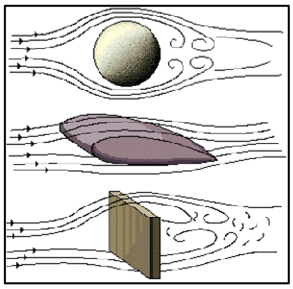
Force de frottement visqueux

Chapitre 6

9

1 – PREAMBULE

Lorsqu'un corps solide se déplace dans un milieu fluide, on observe une force qui s'oppose au mouvement. En effet, nous avons tous constaté par exemple que se mouvoir dans l'eau est plus dur que dans l'air.



⇨ *On se propose ici de voir différents modèles de représentation du frottement fluide.*

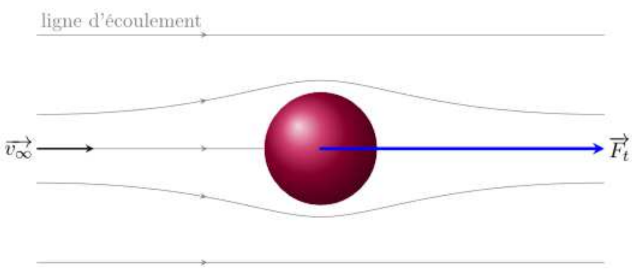
2 – CADRE THEORIQUE – FORMULES DE NAVIER-STOKES

Un formalisme théorique existe et donne lieu à des formules générales dites de Navier-Stokes. Trop complexes pour être abordées ici dans toute leur généralité, elles permettent d'étudier par exemple :

- ⇒ les courants océaniques ou les mouvements des masses d'air dans l'atmosphère,
- ⇒ le comportement d'un pont ou d'un immeuble sous l'action du vent,
- ⇒ le comportement aérodynamique d'un train, d'un avion ou d'une voiture

La formulation générale de Navier-Stokes peut être simplifiée en se plaçant dans certains cas particuliers.

3 – FORMULES PRATIQUES



Dans la suite, on considère un corps solide pongé dans un milieu fluide avec une vitesse relative v. Le corps solide subit alors des forces de frottement $\overrightarrow{F_t}$ qui tendent à le ralentir. L'expérience montre que ces forces de frottement peuvent dépendre fortement de la géométrie du corps solide, du nombre de Reynolds (qui dépend entre autre de la vitesse de l'écoulement) et de la viscosité dynamique (qui dépend sensiblement de la température).

- ⇒ Si le nombre de Reynolds est $R_e < 1$, **l'écoulement est laminaire** et les forces de frottement sont essentiellement dues à la viscosité, les effets cinétiques étant négligeables.
- ⇒ Si le nombre de Reynolds est $1 < R_e < 10^3$, **l'écoulement est intermédiaire** et ont peut admettre que les forces de frottement sont essentiellement dues aux effets cinétiques.
- ⇒ Si le nombre de Reynolds est $10^3 < R_e < 5 \cdot 10^5$, **l'écoulement est turbulent** et les forces de frottement sont essentiellement dues aux effets cinétiques.

Ecoulement laminaire – Formule de Stokes

$$\boxed{\underbrace{F_t}_{N} = \underbrace{k}_{m} \cdot \underbrace{\eta}_{Pa\cdot s} \cdot \underbrace{v}_{m\cdot s^{-1}}}$$

Elle concerne les écoulements de fluides newtoniens incompressibles en régime permanent et à faible nombre de Reynolds ($R_e < 1$).

avec :

F_t : force de frottement.

k : coefficient caractéristique de la géométrie du solide ($k = 6 \cdot \pi \cdot R$ pour une sphère).

η : viscosité dynamique du fluide (assez variable en fonction de la température).

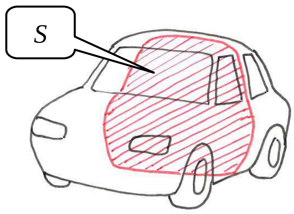
v : vitesse relative solide/fluide.

***<u>Domaines d'utilisation</u>** : circulation sanguine, vitesse de sédimentation.*

Ecoulement turbulent

$$\boxed{\underbrace{F_t}_{N} = \frac{1}{2} \underbrace{\rho}_{kg\cdot m^{-3}} \cdot \underbrace{S}_{m^2} \cdot \underbrace{C_x}_{-} \cdot \underbrace{v^2}_{m\cdot s^{-1}}}$$

Elle concerne les écoulements de fluides newtoniens avec un nombre de Reynolds élevé ($10^3 < R_e < 5 \cdot 10^5$).



F_t : force de frottement.

ρ : masse volumique du milieu fluide.

S : surface frontale ou « maître couple ».

Section du corps solide projetée perpendiculairement au mouvement.

v : vitesse relative solide/fluide.

C_x : coefficient de traînée.

Nombre sans dimension définissant la capacité d'un objet à générer le moins de résistance possible ; il dépend de la géométrie de l'objet mais aussi du nombre de Reynolds.

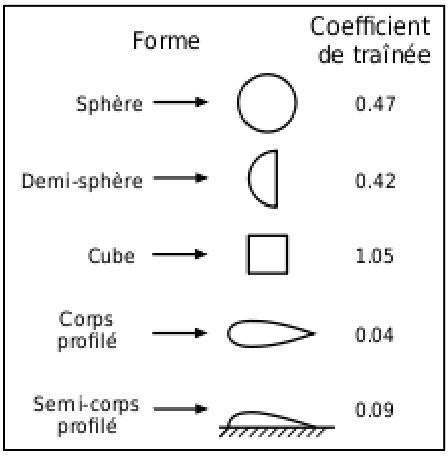
Il se détermine à partir d'essais en soufflerie.

<u>Valeur minimale</u> : $C_{x\,mini} = 0{,}07$ *(corps de forme ovoïde)*

<u>Valeur maximale</u> : $C_{x\,max} = 1{,}4$ *(demi-sphère creuse)*

<u>Exemples indicatifs</u> : voiture : $C_x \approx 0{,}3$ *; camion :* $C_x \approx 0{,}9$

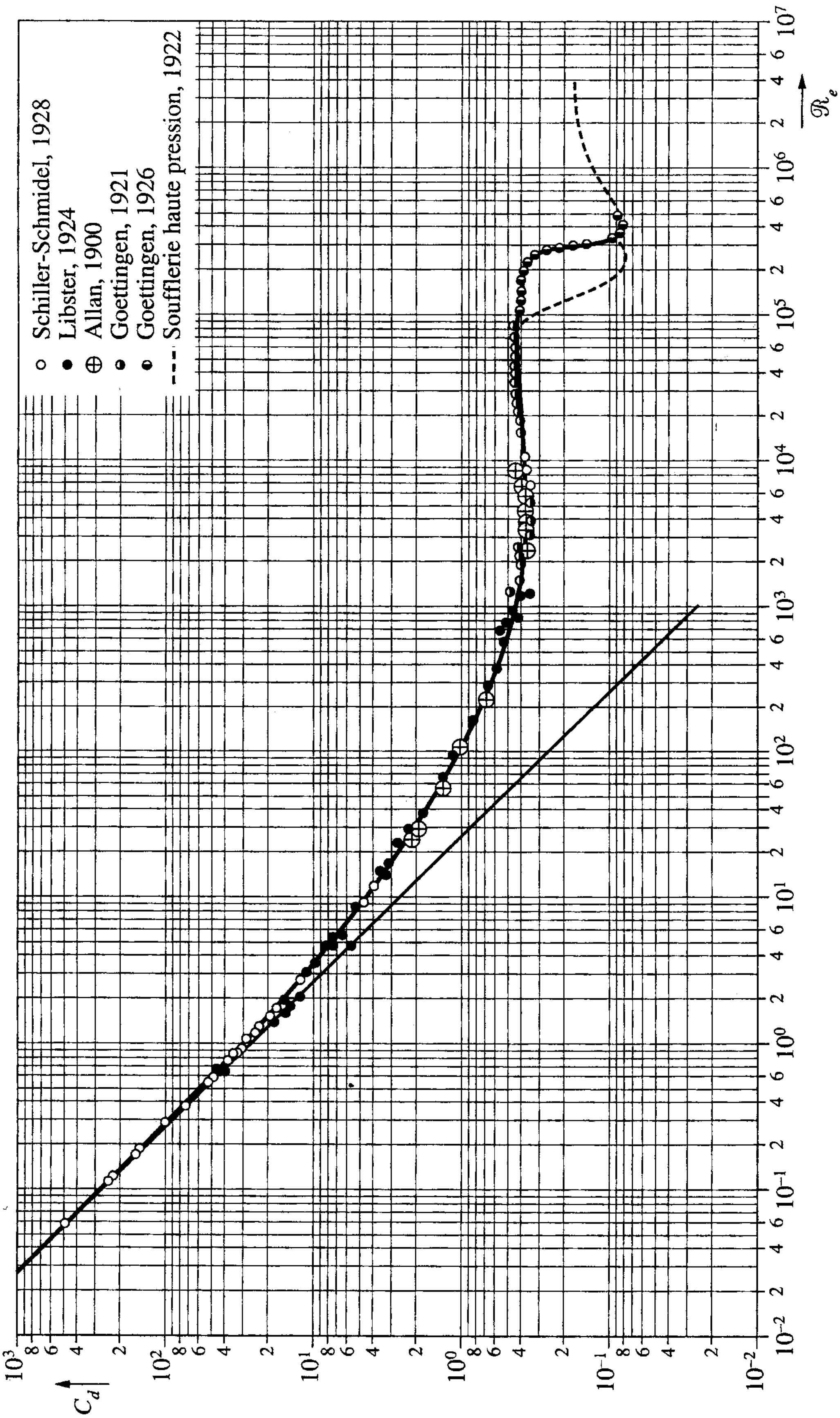
<u>A noter</u> : la goutte d'eau est la forme la plus aérodynamique.



***<u>Domaines d'utilisation</u>** : génie civil (immeuble, pont, etc.), génie mécanique (avion, voiture, train, etc.).*

MECANIQUE DES FLUIDES

Coefficient de trainée d'une sphère
en fonction du nombre de Reynolds



Pour les faibles valeurs de $\mathfrak{R}_e$, $C_x = 24/\mathfrak{R}_e$ (formule de Stokes) expression représentée par la droite de pente – 1 sur le graphe.